Zastosowanie metody operatorowej Laplace'a w analizie stanów nieustalonych

Rachunek operatorowy Laplace'a

Podstawowe oznaczenia

- oryginał funkcji: f(t)
- transformata funkcji: F(s)
- częstotliwość zespolona: $s = \sigma + j\omega$
- proste przekształcenie Laplace'a

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

- odwrotne przekształcenie Laplace'a

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi \cdot j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Własności przekształcenia Laplace'a

- Liniowość przekształcenia

$$L\left[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$
$$L^{-1}\left[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)\right] = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$$

- Transformata pochodnej funkcji czasu

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

Własności przekształcenia Laplace'a

- Transformata całki funkcji czasu

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

- Transformata splotu

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

gdzie

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

Przykłady transformat Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

Wyznaczanie odwrotnej transformaty Laplace'a

Zakładać będziemy, że transformata Laplace'a zadana jest w postaci wymiernej, względem zmiennej zespolonej s

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

Dodatkowo przyjmiemy, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika. Jeśli warunek powyższy byłby niespełniony, należy podzielić licznik przez mianownik tak, aby wymusić spełnienie tego warunku.

Metody wykorzystująca tablice transformat Laplace'a

Przy korzystaniu z tablic transformat należy poprzez elementarne przekształcenia doprowadzić transformatę do postaci standardowej znajdującej się w tablicy transformat, a następnie odczytać z niej oryginał.

Przykład

Dana jest funkcja $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + s + 1}$

Przekształcenie do postaci stablicowanej

$$F(s) = \sqrt{4/3}\,\frac{\sqrt{3/4}}{(s+0{,}5)^2 + \left(\sqrt{3/4}\right)^2}$$

$e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

Oryginał funkcji $f(t) = \sqrt{4/3}\,e^{-0{,}5t}\sin(\sqrt{3/4}\,t)$

Modele operatorowe elementów

Modele operatorowe odpowiadające podstawowym elementom obwodu pozwalają przyporządkować każdemu obwodowi rzeczywistemu jego schemat zastępczy w dziedzinie transformat.

Rezystor

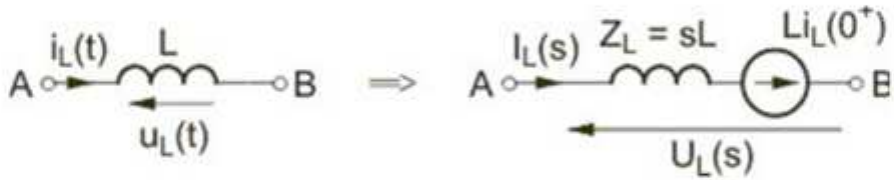
$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

$$U_R(s) = RI_R(s)$$

$$Z_R(s) = R$$

Modele operatorowe elementów

Cewka



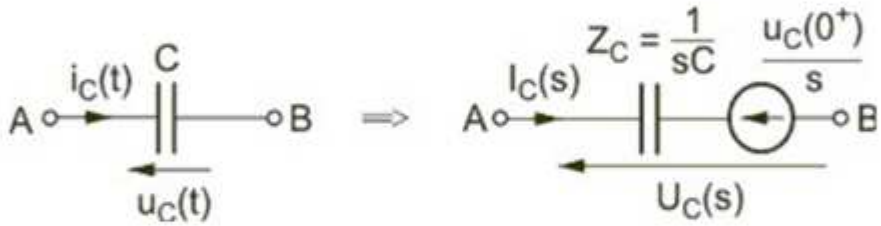
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^+)$$

$$Z_L(s) = sL$$

Modele operatorowe elementów

Kondensator



$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0^+)$$

$$U(s) = \frac{1}{sC}I_C(s) + \frac{u_C(0^+)}{s}$$

Prawa Kirchhoffa dla transformat

Prawo prądowe

$$\sum_{k=1}^{n} I_k(s) = 0$$

Prawo napięciowe

$$\sum_{k=1}^{n} U_k(s) = 0$$

W równaniach tych transformaty prądów i napięć zastąpiły wartości czasowe występujące w podstawowej wersji praw Kirchhoffa. Znaki prądów i napięć ustalane są w identyczny sposób jak w przypadku podstawowej wersji praw Kirchhoffa podanych dla wielkości rzeczywistych.

Obliczenia prądów i napięć w stanie nieustalonym obwodu metodą operatorową

1) Określenie warunków początkowych w obwodzie (wartości $i_L(0^-)$ i $u_C(0^-)$ w chwili przełączenia)
2) Rozwiązanie obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu i wyznaczenie $i_{Lu}(0^+)$ oraz $u_{Cu}(0^+)$
3) Określenie rozwiązania obwodu w stanie przejściowym po przełączeniu przy zastosowaniu metody operatorowej
4) Rozwiązanie obwodu w stanie nieustalonym jest sumą składowej ustalonej oraz składowej przejściowej

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t)$$

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t)$$

Jest to tzw. metoda **superpozycji stanów**.

Etapy obliczenia składowej przejściowej w obwodzie

- utworzenie schematu obwodu dla składowej przejściowej (eliminacja źródeł wymuszających)
- określenie warunków początkowych dla składowej przejściowej

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+)$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+)$$

- utworzenie schematu operatorowego obwodu
- rozwiązanie w dziedzinie zmiennej s
- wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a dla poszukiwanych wielkości